Teoretická část - 31.1.

1. (a) Definujte Gâteauxovu derivaci ve směru, Gâteauxovu derivaci a Fréchetovu derivaci $(2,5$ bodu).

   (b) Rozhodněte o platnosti níže uvedených tvrzení pro Banachův prostor $(X, ||\cdot||)$, funkcionál $F : X \to \mathbb{R}$ a spojitý lineární funkcionál $L : X \to \mathbb{R}$.

      i. Má-li F v bodě $x \in X$ Fréchetovu derivaci L, potom má F má v bodě x Gâteauxovu derivaci, která je rovna L.

      ii. Má-li F v bodě $x \in X$ Gâteauxovu derivaci L, potom má F má v bodě x Fréchetovu derivaci, která je rovna L.

      iii. Má-li F v bodě $x \in X$ Fréchetovu derivaci, potom je F spojitý v x.

      iv. Má-li F v bodě $x \in X$ Gâteauxovu derivaci, potom je F spojitý v x.

      v. Má-li F v bodě $0 \in X$ Fréchetovu derivaci 0 (konstantně nulový funkcionál), potom funkconál $x \mapsto F(x)^2$, $x \in X$, má v bodě $0 \in X$ Fréchetovu derivaci 0.

   $(5,5$ bodu).

2. (a) Definujte bodovou, stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci (2 body).

   (b) Zfromulujte a dokažte větu o stejnoměrné konvergenci derivací (4 body).

   (c) Rozhodněte o platnosti níže uvedených tvrzení

      i. nechť $\{f_n\} \subset C([1,3])$, $f \in C([1,3])$ a nechť $f_n \to f$, potom $(R)\displaystyle\int_1^3 f = \lim_{n\to\infty}(R)\int_1^3 f_n$,

      ii. nechť $\{f_n\} \subset C([1,3])$, $f \in C([1,3])$ a nechť $f_n \rightrightarrows f$, potom $(R)\displaystyle\int_1^3 f = \lim_{n\to\infty}(R)\int_1^3 f_n$,

      iii. nechť $\{f_n\} \subset C^1([1,3])$, $f \in C^1([1,3])$ a nechť $f_n' \rightrightarrows f'$, potom $f_n \rightrightarrows f$.

      Vše řádně zdůvodněte (2 body).

3. (a) Definujte ortogonální, ortonormální a úplnou množinu a abstraktní Fourierovu řadu (3 body).

   (b) Zfromulujte a dokažte

      i. větu o nejlepší aproximaci,

      ii. větu o Besselově nerovnosti a Parsevalově rovnosti

      $(3,5$ bodu$)$.

   (c) Uvažme Hilbertův prostor l_2 všech reálných posloupností $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, pro které platí $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty$, vybavený skalárním součinem

$$\langle \{x_n\}, \{y_n\} \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n.$$

   Uvažme dále prvky $e^n = \{e_k^n\}_{k=1}^{\infty} \in l_2$, $n \in \mathbb{N}$, definované jako

$$e_k^n = \begin{cases} 1, & k = n, \\ 0, & k \neq n \end{cases}$$

   a množinu $P = \{e^n : n \in \mathbb{N}\}$.

      i. Dokažte, že množina P je úplná ortonormální množina (v l_2).

      ii. Napište Fourierovy koeficienty posloupnosti $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} \in l_2$ vzhledem k P.

   Vše řádně zdůvodněte $(1,5$ bodu$)$.